

УДК 514.17+514.174

Оценка расстояния между двумя телами внутри n -мерного единичного куба и шара**Ф. А. Ивлев¹**

Рассматривается задача об оценке расстояний между двумя телами объема ε , расположенными внутри n -мерного тела B единичного объема, при $n \rightarrow \infty$. В ряде случаев такие расстояния ограничены функцией от ε , не зависящей от n . Мы рассматриваем случаи, когда B — шар или куб.

Ключевые слова: Минимальная поверхность, многомерная выпуклая геометрия, центральные предельные теоремы.

The problem of bounding of the distance between the two bodies of volume ε located inside the n -dimensional body B of unit volume where $n \rightarrow \infty$ is considered. In some cases such distances are bounded by function depends on ε but not depends on n . We consider cases when B is a sphere or a cube.

Key words: Minimal surface, multidimensional convex geometry, central limit theorems.

1. Введение

Пусть B_n — тело единичного объема в n -мерном пространстве. При $n \rightarrow \infty$ диаметр B_n тоже стремится к бесконечности, так что внутри тела B можно найти далекие точки. Это обстоятельство связано с трудностями при переносе конечномерных результатов на бесконечномерные, в частности, в функциональном анализе. Тем не менее в ряде случаев есть основания предполагать, что если взять два множества объема ε , то расстояние между ними окажется ограниченной функцией от ε , вне зависимости от n . Это обстоятельство может оказаться полезным, в том числе и для переноса результатов на бесконечномерный случай. Интересно, что результаты затрагивают теорию минимальных поверхностей [2], [3].

Под *расстоянием* $\text{dist}(A, B)$ между множествами A и B мы понимаем величину:

$$D = \text{dist}(A, B) = \inf_{X \in A, Y \in B} \text{dist}(X, Y),$$

где $\text{dist}(X, Y)$ есть расстояние между точками X и Y .

Следующие две гипотезы были предложены Н. А. Бобылевым и А. Я. Канелем:

Гипотеза 1. (случай куба) Пусть ε — данное число в интервале $(0, 1)$, K_n — n -мерный куб единичного объема. Внутри K_n выбраны два множества A и B , каждое объема ε . Тогда расстояние между A и B не больше, чем некоторая константа $D = D(\varepsilon)$, и не зависит от размерности пространства n .

Гипотеза 2. (случай шара) Пусть ε — данное число в интервале $(0, 1)$, K_n — n -мерный шар единичного объема. Внутри K_n выбраны два множества A и B , каждое объема ε . Тогда расстояние между A и B не больше, чем некоторая константа $D = D(\varepsilon)$, и не зависит от размерности пространства n .

Очевидно, что, если $\varepsilon \geq 1/2$, то обе гипотезы верны. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $\varepsilon < 1/2$.

В данной работе гипотеза 1 доказана в случае, когда множества A и B являются пересечениями полупространств с кубом, причем границы этих полупространств перпендикулярны главной диагонали куба. Также доказана гипотеза 2 в случае, когда множества A и B выпуклы. В конце приведены общая идея о том, почему поставленная гипотеза скорее всего верна и для произвольных множеств, план доказательства гипотезы, постановки близких задач.

2. Выпуклые множества

Зачастую для удобства мы будем опускать индекс размерности у рассматриваемых тел и, например, обозначать n -мерный куб просто K .

2.1. Общий случай

Сделаем несколько общих замечаний, применимых к поставленной задаче для любой фигуры.

Вместо множеств A и B можно взять из замыкания \bar{A} и \bar{B} и расстояние от этого между ними не изменится. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что множества A и B замкнуты, и, следовательно, компактны.

¹ Федор Алексеевич Ивлев — студ. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ivlevfyodor@gmail.com.

Напомним классический факт:

Лемма 1. Пусть A и B выпуклые компактные подмножества \mathbb{R}^n . Тогда существуют параллельные гиперплоскости Π_A и Π_B , разделяющие множества A и B , расстояние между которыми равно расстоянию между множествами A и B .

Обозначим рассматриваемую фигуру единичного объема через F . Рассмотрим часть F , отсекаемую гиперплоскостью Π_A , и содержащую множество A . Обозначим ее через A' . Аналогично определим B' . Тогда множества A' и B' объема хотя бы ε , потому что содержат одно из множеств A и B , а расстояние между ними такое же, как расстояние между A и B . Если заменить в гипотезе условие, что объемы множества A и B равны ε , на то, что объемы этих множеств не меньше ε , мы получим гипотезу очевидно равносильную исходной. Поэтому при работе с выпуклыми множествами мы сразу будем оперировать с множествами вида A' и B' и называть просто A и B соответственно.

2.2. Случай шара

Теорема 1. Пусть задано число $\varepsilon \in (0, 1/2)$, S_n — n -мерный шар единичного объема. Выпуклые подмножества A и B этого шара имеют объем ε каждое. Тогда расстояние между A и B не превосходит некоторой константы $D = D(\varepsilon)$, не зависящей от n .

Доказательство В силу леммы 1 имеем гиперплоскости Π_A и Π_B , и множества A и B суть пересечения одного из полупространств, на которые делят пространство гиперплоскости Π_A и Π_B соответственно, с шаром S . Будем оценивать расстояние между A и B .

Обозначим центр шара через O , а плоскость, проходящую через O параллельную Π_A через Π . Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными, как следует из леммы 1, плоскостями Π_A и Π_B . Значит, оно равно удвоенному расстоянию от точки O до множества A или, что то же самое, расстоянию между плоскостями Π_A и Π . Обозначим это расстояние через d .

Лемма 2. Объем части шара S единичного объема, находящейся между гиперплоскостью Π , проходящей через его центр и параллельной гиперплоскостью Π' , отстоящей от первой на расстояние d , при стремлении размерности n к бесконечности стремится к

$$\sqrt{e} \int_0^d e^{-\pi e x^2} dx$$

Доказательство. Очевидно этот объем равен

$$V = \int_0^d S(x) dx,$$

где $S(x)$ — объем $(n-1)$ -мерного шара, являющегося сечением исходного шара S гиперплоскостью Π_x , параллельной Π и находящейся от нее на расстоянии x . Ее радиус по теореме Пифагора равен $r = \sqrt{R_n^2 - x^2}$, где R_n — радиус n -мерного шара единичного объема. Объем этого шара равен $C_{n-1} r^{n-1}$, где $C_{n-1} = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)}$. Из уравнения $C_n R_n^n = 1$ находим формулу для R_n

$$R_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)^{1/n}}{\pi^{1/2}}.$$

Подставляя это выражение в формулу объема имеем:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^d S(x) dx = \int_0^d C_{n-1} \left(\sqrt{R_n^2 - x^2} \right)^{n-1} dx = \\ &= \int_0^d C_{n-1} R_{n-1}^{n-1} \cdot \left(\frac{R_n}{R_{n-1}} \right)^{n-1} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R_n^2}} \right)^{n-1} dx = \left(\frac{R_n}{R_{n-1}} \right)^{n-1} \int_0^d \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R_n^2}} \right)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

Найдем к чему стремится первый множитель. Имеем

$$\left(\frac{R_n}{R_{n-1}} \right)^{n-1} = \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)^{1/n}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)^{1/(n-1)}} \right)^{n-1} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)^{\frac{n-1}{n}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)}$$

Воспользуемся асимптотической формулой роста Гамма-функции в следующем виде

$$\Gamma(z+1) = e^{-z} z^{z+1/2} (2\pi)^{1/2} (1 + O(\frac{1}{z})), \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Получаем в нашем случае

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{\frac{n-1}{n}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2}+1)} &= \frac{\left(e^{-n/2} \left(\frac{n}{2}\right)^{(n+1)/2} (2\pi)^{1/2} (1 + O(\frac{1}{n}))\right)^{\frac{n-1}{n}}}{e^{-(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n/2} (2\pi)^{1/2} (1 + O(\frac{1}{n}))} = \\ &= \frac{e^{-(n-1)/2} \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{-1}{2n}} (2\pi)^{1/2} (2\pi)^{\frac{-1}{2n}} (1 + O(\frac{1}{n}))^{\frac{n-1}{n}}}{e^{-(n-1)/2} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n/2} (2\pi)^{1/2} (1 + O(\frac{1}{n}))} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{-1}{2n}} \frac{(1 + O(\frac{1}{n}))^{\frac{n-1}{n}}}{1 + O(\frac{1}{n})} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} (1 + (1)) = \exp(\frac{1}{2})(1 + (1)), \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы осталось показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^d \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R_n^2}} \right)^{n-1} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi e}} \int_0^d e^{-x^2} dx.$$

Обозначим подынтегральное выражение через $F(x, n)$. Заметим, что оно положительно начиная с некоторого n и не превосходит единицы. Поэтому

Покажем, что последовательность $F(x, n)$ равномерно по n на отрезке $[\delta, d]$ сходится к $\exp(-x^2 \pi e)$. Для этого представим $F(x, n)$ в следующем виде:

$$F(x, n) = \left(1 - \frac{1}{R_n^2/x^2}\right)^{R_n^2/x^2 \cdot \frac{n-1}{2(R_n^2/x^2)}} = \left(\left(1 - \frac{1}{R_n^2/x^2}\right)^{R_n^2/x^2}\right)^{\frac{n-1}{2(R_n^2/x^2)}}.$$

Поскольку $\lim_{y \rightarrow \infty} (1 - 1/y)^y = e^{-1}$, для любого $\alpha > 0$ существует такое $Y > 1$, что для любого $y > Y$ верно, что

$$(1 - 1/y)^y = e^{-1+\beta}, \quad \text{где } |\beta| < \alpha.$$

Так как $R_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то начиная с некоторого N_1 для всех $n > N_1$ верно, что $R_n > dY$. Следовательно, для всех $x \in [\delta, d]$ верно, что $R_n^2/x^2 > Y$, а значит,

$$\left(1 - \frac{1}{R_n^2/x^2}\right)^{R_n^2/x^2} = e^{-1+\beta(n)}, \quad \text{где } |\beta(n)| < \alpha \text{ для всех } n > N_1.$$

Тогда для $n > N_1$ имеем

$$F(x, n) = \left(e^{-1+\beta(n)}\right)^{\frac{x^2(n-1)}{2R_n^2}} = \left(e^{(-1+\beta(n))((n-1)/(2R_n^2))}\right)^{x^2}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2R_n^2} &= \frac{n-1}{2 \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)^{1/n}}{\pi^{1/2}}\right)^2} = \frac{n-1}{2 \left(\left(e^{-n/2} \left(\frac{n}{2}\right)^{(n+1)/2} (2\pi)^{1/2} (1 + O(\frac{1}{n}))\right)^{1/n} / \pi^{1/2}\right)^2} = \\ &= \frac{(n-1)\pi}{2e^{-1} \left(\frac{n}{2}\right)^{(n+1)/n} (2\pi)^{1/n} (1 + o(1))} = \frac{\pi e(n-1)}{2 \frac{n}{2} (1 + o(1))} = \pi e(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Следовательно, всегда можно подобрать такое N , что при $n > N$ функция $F(x, n)$ равномерно по n для всех x из отрезка $[\delta, d]$ приближает функцию $e^{-\pi ex^2}$ с наперед заданной точностью.

Получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^d \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{R_n^2}} \right)^{n-1} dx = \int_0^d e^{-\pi ex^2} dx,$$

что и требовалось.

Лемма 2 доказана.

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что, подбирая соответствующее d , мы сможем получить любой наперед заданный объем $1/2 - \varepsilon \in (0, 1/2)$. Действительно, если, отступая от центра шара на расстояние d , мы набираем объем хотя бы $1/2 - \varepsilon$ начиная с некоторой размерности, то расстояние от O до A не превышает этого расстояния d . Следовательно, расстояние между A и B не будет превышать $2d$ начиная с некоторой размерности, что и требуется доказать.

Покажем, что мы действительно можем, отступая на расстояние d , получить любой наперед заданный объем из интервала $(0, 1/2)$. Для этого осталось заметить, что

$$\sqrt{e} \int_0^\infty e^{-\pi ex^2} dx = \sqrt{e} \frac{1}{\sqrt{\pi e}} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1/2.$$

Следовательно, мы видим, что надо расстояние между множествами будет стремиться к такому числу $D = D(\varepsilon)$, что $\sqrt{e} \int_0^D e^{-\pi ex^2} dx = 1/2 - \varepsilon$.

Теорема 1 доказана.

2.3. Случай куба

Мы опять же ограничимся рассмотрением выпуклых множеств A и B . Поэтому можно считать, что эти множества суть пересечения некоторых полупространств с кубом, причем границы соответствующих полупространств, гиперплоскости Π_A и Π_B соответственно, параллельны. Так как нас интересует возможный максимум расстояний, то мы считаем, что объемы A и B в точности равны ε . Значит, по направлению нормали к разделяющим гиперплоскостям можно однозначно восстановить сами гиперплоскости, множества и расстояние между ними. Поэтому можно считать, что искомое расстояние есть функция на единичной $(n-1)$ -мерной сфере. Обозначим эту функцию через $f(\vec{n})$. Будем считать, что координаты всех вершин куба равны либо 0 либо 1. Тогда очевидно, что все квадранты для функции f равноправны, поэтому мы будем рассматривать только квадрант, где все координаты положительны. Так как функция определена на компакте, то она достигает своего максимума на нем.

Если какая-то координата n_i нормали \vec{n} равна нулю, то соответствующая ей гиперплоскость перпендикулярна любой гиперплоскости вида $x_i = \text{const}$. Но тогда в сечении гиперплоскостью такого вида получится $(n-1)$ -мерный куб с множествами A и B $(n-1)$ -мерного объема ε и таким же расстоянием между ними. Поэтому все нулевые координаты можно исключить из рассмотрения, перейдя к меньшей размерности.

Наше доказательство будет опираться на следующий недоказанный факт.

Гипотеза 3. В точке достижения глобального максимума функции $f(\vec{n})$ все ненулевые координаты нормали \vec{n} равны между собой.

По сути этот факт нам говорит о том, что лучший ответ для любого ε достигается в некоторой размерности, как гиперплоскость, перпендикулярная главной диагонали куба. То есть оба множества максимально «вжимаются» в противоположные углы куба. в предположении справедливости гипотезы докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть задано число $\varepsilon \in (0, 1/2)$, K_n — n -мерный куб единичного объема. Выпуклые подмножества A и B куба K_n имеют объем ε каждое. Тогда расстояние между A и B не превосходит некоторой константы $d = d(\varepsilon)$, не зависящей от n .

Доказательство. Будем считать, что координаты всех вершин куба равны либо 0 либо 1. Для каждого n рассмотрим плоскость Π_A^n вида $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a(n)$ и соответствующее ей множество A_n вида $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a(n)$, $x_i \geq 0$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. При этом $a(n)$ выбирается так, чтобы объем A_n был равен ε . Тогда соответствующее множество B_n будет симметрично A_n относительно центра куба. Расстояние между множествами в этом случае будет равно расстоянию между проекциями этих множеств на главную диагональ куба, соединяющую вершины $(0, 0, \dots, 0)$ и $(1, 1, \dots, 1)$. Расстояние от начала координат вдоль этой диагонали пропорционально сумме координат точки с коэффициентом $1/\sqrt{n}$. Значит, расстояние между этими множествами будет равно $n \cdot 1/\sqrt{n} - 2 \cdot a(n) \cdot 1/\sqrt{n} = \sqrt{n} - 2a/\sqrt{n}$.

Для того, чтобы оценить это расстояние введем n независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Тогда набор значений этих случайных величин задает точку в нашем единичном кубе. Так как все они независимые и равномерно распределены на $[0, 1]$, то распределение внутри куба будет однородное. В этом случае вероятность попадания точки в наше множество будет равна его объему, то есть ε . Значит,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \leq a(n)\right) = P\left(\sum \xi_i - \sum E_{\xi_i} \leq a(n) - \sum E_{\xi_i}\right) = \\ &= P\left(\frac{\sum \xi_i - \sum E_{\xi_i}}{D_{\xi_1} \sqrt{n}} \leq \frac{a(n) - \frac{1}{2}n}{D_{\xi_1} \sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{\sum \xi_i - \sum E_{\xi_i}}{D_{\xi_1} \sqrt{n}} \leq \frac{a(n) - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{12}\sqrt{n}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{a(n) - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{12}\sqrt{n}}\right) + \frac{c(n)}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

По теореме Берри–Эссеена¹, примененной к нашим случайным величинами, имеем

$$\varepsilon = P\left(\frac{\sum \xi_i - \sum E_{\xi_i}}{D_{\xi_1} \sqrt{n}} \leq \frac{a(n) - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{12}\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{a(n) - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{12}\sqrt{n}}\right) + \frac{c(n)}{\sqrt{n}},$$

где $c(n)$ — некоторая ограниченная функция.

Заметим, что в левой части этого равенства стоит константа, а второе слагаемое в правой части стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Значит, первое слагаемое в правой части этого равенства стремится к ε . А следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n) - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{12}\sqrt{n}} = \Phi^{-1}(\varepsilon) = b.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{a(n) - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{12}\sqrt{n}} &= b + (1) \\ a(n) &= \frac{n}{2} + \frac{1}{12}b\sqrt{n} + (\sqrt{n}).\end{aligned}$$

Осталось вспомнить, что искомое расстояние равно $\sqrt{n} - 2a/\sqrt{n}$. Обозначим его через $d(n)$ и подставим полученное значение для $a(n)$:

$$\begin{aligned}d(n) &= \sqrt{n} - \frac{2(\frac{n}{2} + \frac{1}{12}b\sqrt{n} + (\sqrt{n}))}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \frac{n + \frac{1}{6}b\sqrt{n} + (\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \sqrt{n} - \frac{1}{6}b + (1) \\ d(n) &= -\frac{1}{6}b + (1) = -\frac{1}{6} \cdot \Phi^{-1}(\varepsilon) + (1)\end{aligned}$$

Получаем, что искомое расстояние стремится к $-1/6 \cdot \Phi^{-1}(\varepsilon)$ при $n \rightarrow \infty$. Значит, расстояние $d(n)$ ограничено некоторой константой, независимой от n , ч. т. д.

Теорема 2 доказана.

3. Общий случай

Выше мы рассмотрели случаи выпуклых множеств A и B и достаточно сильно пользовались спецификой выпуклости. В общем случае, когда A и B могут быть невыпуклыми, их уже нельзя будет разделить гиперплоскостями. Даже, если это нам удастся, расстояние между этими гиперплоскостями может быть не равно расстоянию между множествами. Автор считает верным предположение о том, что наибольшее расстояние между множествами A и B все-таки достигается тогда, когда они оба выпуклы. Автору также пока неизвестно строгое доказательства этого предположения.

¹Подробное описание приведено в [1]

Можно считать, что для множеств A и B определена их граница, а у границы определена площадь. Иначе A и B можно приблизить множествами с указанными свойствами и, перейдя к пределу, получить то же самое расстояние между множествами в пределе. Определим площадь свободной поверхности множеств A и B как площадь той части их границы, которая не является границей объемлющей фигуры (куба, шара, ...).

Идея состоит в том, что даже при маленьком объеме, но как-то ограниченного снизу, при достаточно большой размерности пространства площадь поверхности границы этого множества будет достаточно большой. Так же хочется показать, что вместе с ней будет достаточно большой площадь свободной поверхности. Тогда, пользуясь тем, что объем δ -окрестности множества, отличается от объема исходного множества примерно на произведение δ и площади свободной поверхности, мы получим, что объем d -окрестности множества A будет иметь объем хотя бы $\int_0^d S(x, \varepsilon) dx$. Здесь $S(x, \varepsilon)$ обозначает минимальную возможную площадь свободной поверхности среди всевозможных x -окрестностей множеств объема ε .

Если оценить $S(x, \varepsilon)$ снизу, то мы получим, что для некоторого фиксированного $d = d(\varepsilon)$ объем d -окрестности любого множества объема ε будет равен хотя бы $1/2$. Но тогда расстоянием между множествами A и B будет не более, чем $2d$. Действительно, при взятии d -окрестности каждого из них мы получим множества объема равного хотя бы половине всего объема объемлющей фигуры. Значит, они пересекаются и мы можем найти точки A и B на расстоянии не более, чем d от этой точки пересечения.

4. Возможные обобщения

В данной работе были рассмотрены случаи подмножеств куба и шара единичного объема. Можно обобщить утверждение основной гипотезы на случай произвольного тела. Задача перестает быть интересной, если разрешить телу быть «вытянутым» относительно ограниченного числа координат: если в качестве тела позволить брать параллелепипед вытянутый вдоль одной координаты и узкий относительно других² то очевидно, что расстояние между двумя его подмножествами может быть неограничено даже при фиксированной размерности пространства. Если разрешить телу быть невыпуклым, то существует контрпример в виде «ежа»: тело, вытянутое вдоль каждой оси координат. Поэтому видится целесообразным поставить следующую гипотезу

Гипотеза 4. Пусть ε — данное число в интервале $(0, 1)$, K_n — n -мерное выпуклое тело единичного объема инвариантное относительно произвольной перестановки координат. Внутри K_n выбраны два множества A и B , каждое объема ε . Тогда расстояние между A и B не больше, чем некоторая константа $D = D(\varepsilon)$, и не зависит от размерности пространства n .

Например, можно рассмотреть случай правильных многомерных многогранников: тетраэдра и октаэдра.

Благодарности. Автор признателен своим научным руководителям А. Я. Белову и А. В. Михалеву за постановку задач и внимание к работе. Исследование поддержано грантом РФФИ № 14-01-00548.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н. Вероятность. МЦНМО, Москва, 2007
2. Fomenko A. T. Variational problems in topology, The geometry of length, area and volume, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1990, x+225 pp.
3. Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато, Наука, М., 1987, 312 с. mathscinet zmath; англ. пер.: Dao Trong Thi, A. T. Fomenko, Minimal Surfaces, Stratified Multivarifolds and the Plateau Problem, Translation of Mathematical Monographs, 84, Amer. Math. Soc., 1991, 404 с

²Например, со сторонами $0.5, 0.5, \dots, 0.5, 2^{n-1}$